



Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

Ecole doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France - 072



Titre : Probabilités libres et algèbres de Hopf combinatoires

Directeur de thèse : Loïc Foissy (Université du Littoral Côte d'Opale)

E-mail : Loic.Foissy@univ-littoral.fr

Co-directeur de thèse : Benoit Fresse (Université de Lille)

E-mail : Benoit.Fresse@univ-lille.fr

Laboratoire : Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville / Laboratoire Paul Painlevé

Equipe : Géométrie - Topologie

Descriptif :

En théorie des probabilités libres, la notion de cumulants (libres, booléens, monotones, conditionnellement libres...) peut se comprendre à l'aide d'une algèbre doublement tensorielle sur l'algèbre des variables aléatoires non commutatives que l'on considère. Une nouvelle approche du type théorie des groupes est récemment apparue. La correspondance classique entre les algèbres et les groupes de Lie via l'exponentielle est enrichie grâce à de nouveaux phénomènes liés, entre autres, à la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, la formule de Magnus, les idempotents de Lie et d'autres ingrédients-clés de la théorie classique des algèbres de Lie libres. Ebrahimi-Fard et Patras ont récemment proposé une approche différente des relations entre cumulants et moments en montrant le rôle joué par différentes algèbres de Hopf de battage ou co-battage (également appelées algèbres dendriforme ou codendriforme). Dans ce cadre, les cumulants peuvent être caractérisés par des équations de type point fixe, dont on peut déduire différentes propriétés. Les relations entre les différentes notions de cumulants ont été étudiées de façon intensive d'un point de vue combinatoire (en utilisant des inversions de Möbius dans des treillis, essentiellement). Ainsi, Lehner et Josuat-Vergès ont décrit la relation entre les cumulants libres et les cumulants. Leur méthode a été ensuite étendue au cas des cumulants monotones et booléens. L'approche d'Ebrahimi-Fard et Patras permet de donner un cadre purement algébrique à ces relations en étendant les relations classiques entre les algèbres de Lie et les groupes de Lie.

Dans ce contexte, les notions d'algèbre de battage non commutative, d'opéade et de coopéade, d'algèbre pré-Lie jouent un rôle central. L'utilisation des techniques développées pour étudier ces objets apportent un éclairage nouveau sur les probabilités libres, que nous proposons d'étudier dans les directions suivantes :

- Comment relier les algèbres de Hopf combinatoires utilisées en probabilités libres avec les objets classiques ? Par exemple, il existe de fortes similitudes entre l'algèbre des partitions non croisées et le modèle non commutatif de l'algèbre de Connes et Kreimer : quel est le lien entre les deux ?



- Dans l'approche combinatoire des cumulants, le complément de Kreweras joue un rôle important. Quelle est sa signification au niveau des algèbres de de battage ? Cette opération combinatoire devrait avoir une interprétation au niveau des algèbres de Hopf, qui reste à trouver.
- Quel est le lien entre l'approche par les algèbres de battage et l'approche de Nika et Speicher ? Cette dernière fait également appel à des algèbres de Hopf combinatoires, quel est le lien entre ces deux familles d'objets ?