Ecole doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France - 072

Titre : Problèmes isopérimétriques avec intéractions Wasserstein

Directeur de thèse : Benoît Merlet
E-mail : benoit.merlet@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse : Michael Goldman (CR CNRS, Université de Paris)
E-mail : goldman@math.univ-paris-diderot.fr

Laboratoire : Laboratoire Painlevé

Equipe : Analyse Numérique - EDP

Descriptif : voir pages suivantes.

Descriptif : Ce projet correspond à une thèse sur des problèmes variationnels géométriques faisant intervenir des énergies de transport. Elle se place donc à l'interface entre théorie géométrique de la mesure, calcul des variations, EDP elliptiques et transport optimal.

Contexte . Ces dix dernières années ont vu un progrès très important dans la compréhension de la structure de minimiseurs de problèmes du type

$$\min\Big\{P(E)+L(E): E\subset \mathbf{R}^d \text{ mesurable de volume } V\Big\} \tag{1}$$

où $L(E)$ est le $(d-1)$-périmètre de E et L est un terme d'interaction typiquement non-local et répulsif. Les motivations pour étudier ce type de modèles sont multiples, que ce soit en physique atomique ou pour la formation des galaxies, en passant par la description des membranes bi-lipidiques. D'un point de vue mathématique, la richesse de cette classe de modèles provient de la compétition entre le terme d'interface qui privilégie l'aggrégation et le terme répulsif qui lui pousse au contraire à la désagrégation. Selon les hypothèses faites sur L et V, on peut s'attendre à l'émergence de structures très variées, allant de minimiseurs sphériques (comme pour le problème isopérimétrique classique correspondant à $V=0$), à des motifs périodiques jusquà la non-existence de minimiseurs.

L'exemple le plus simple de problèmes de type (1) est le modèle de Gamow pour les noyaux atomiques. Dans ce cas, E est considéré comme un objet uniformément chargé et $L(E)$ est la répulsion coulombienne entre les charges.

$$L(E)=\int_{E\times E}\frac{dxdy}{|x-y|^{d-2}} \tag{2}$$

Pour cette fonctionnelle, il est connu que pour V petit la boule est minimisante tandis que pour les grandes masses, le minimum n'est pas atteint. L'un des outils centraux dans cette analyse est l'inégalité isopérimétrique quantitative [4]. Pour le modèle cousin d'Ohta-Kawasaki, il est en revanche conjecturé que les minimiseurs forment des structures périodiques [1].

Objectifs. Le but de cette thèse est d'étudier ce type de problèmes lorsque la fonctionnelle L fait intervenir une énergie de transport. Le premier exemple considéré sera le suivant : pour $p\geq 1$ fixé et deux mesures μ et ν de même masse, la distance de Wasserstein d'ordre p entre μ et ν est donnée par

$$W_p^p(\mu,\nu)=\min_T\left\{\int_{\mathbb{R}^d}|T(x)-x|^p d\mu(x) \ : \ T\#\mu=\nu\right\}.$$

On prend alors

$$L(E)=\min_F\left\{W_p^p(\chi_E,\chi_F) \ : E\cap F=\emptyset,\ |E|=|F|\right\}. \tag{3}$$

Cette fonctionnelle a été introduite dans [5] comme un modèle simplifié pour les membranes bi-lipidiques. Si l'existence de minimiseurs est connue en dimension deux ou pour des volumes V très petits [3, 6], il reste encore beaucoup de questions ouvertes. Une première étape serait d'étendre le résultat d'existence de minimiseurs de [3] à toutes les dimensions. Une deuxième étape serait de démontrer que lorsque V est petit la boule est minimisante. Il s'agirait ensuite de voir ce qui peut être obtenu pour de plus grands volumes.

Un deuxième modèle qui sera étudié est une variante du modèle d'Ohta-Kawasaki où la distance H^{-1} est remplacée par une distance de Wasserstein. Ce modèle a été introduit dans [2] où un lien avec des problèmes de quantisation de mesures a été montré. Cette fois-ci, pour $E \subset [0,1]^d$, $V \in (0,1)$ et $\gamma > 0$, on considère l'énergie

$$L(E) = \gamma W^p \left(\frac{1}{V} \chi_E, \frac{1}{1-V}(1-\chi_E) \right). \tag{4}$$

On s'intéressera au comportement des minimiseurs dans la limite de faible densité $V \to 0$ et on essayera en particulier d'étendre les résultats de [2] à un régime de paramètres plus large.

D'un point de vue mathématique, la difficulté pour étudier les fonctionnelles (3) et (4) en comparaison avec le modèle (2) est que pour ce dernier l'énergie d'interaction est une fonction explicite de E. Il existe d'autres exemples de fonctionnelles L dépendant de façon non explicite de E (première valeur du laplacien, capacité etc...) mais jusqu'ici toutes mettaient en jeu la solution d'une EDP linéaire, typiquement le laplacien. Pour (3) et (4), au contraire, l'équation sous jacente est l'équation de Monge-Ampère qui est à la fois non-linéaire et dégénérée.

References

[1] G. Alberti, R. Choksi, and F. Otto, *Uniform energy distribution for an isoperimetric problem with long-range interactions*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 2, 569–605.

[2] D. P. Bourne, M. A. Peletier, and S. M. Roper, *Hexagonal patterns in a simplified model for block copolymers*, SIAM J. Appl. Math. **74** (2014), no. 5, 1315–1337.

[3] G. Buttazzo, G Carlier, and M Laborde, *On the Wasserstein distance between mutually singular measures*, Adv. Calc. Var. **13** (2020), no. 2, 141–154.

[4] N. Fusco, F. Maggi, and A. Pratelli, *The sharp quantitative isoperimetric inequality*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), no. 3, 941–980.

[5] Mark A. Peletier and Matthias Röger, *Partial localization, lipid bilayers, and the elastica functional*, Arch. Ration. Mech. Anal. **193** (2009), no. 3, 475–537.

[6] Q. Xia and B. Zhou, *The existence of minimizers for an isoperimetric problem with Wasserstein penalty term in unbounded domains*, 2020.