Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur

Ecole doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France - 072

Titre : Équivalences de Morita dans les mathématiques équivariantes

Directeur de thèse : Ivo Dell'Ambrogio
E-mail : ivo.dell-ambrogio@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse : -
E-mail : -

Laboratoire : Laboratoire de mathématiques Paul Painlevé

Equipe : Géométrie et Topologie

Descriptif :

Ce projet de thèse se situe à l'intersection entre la théorie des représentations modulaires des groupes finis et la topologie algébrique. On se propose d'appliquer des méthodes de l'algèbre homotopique et des catégories supérieures à la résolution de quelques questions en théorie des représentations. Réciproquement, les méthodes envisagées nous permettront de transposer ces mêmes questions dans d'autres domaines des mathématiques (en géométrie et topologie) où elles n'ont pas encore été étudiées de façon systématique.

Contexte

Initiée au début du XX^{ème} siècle, la théorie des représentations modulaires est l'étude des représentations linéaires en caractéristique positive (divisant l'ordre du groupe). À différence du cas classique en caractéristique nulle, où le théorème de Maschke réduit quasiment toute question à l'étude de l'anneau des caractères, dans le cas modulaire il faut prendre en considération la structure de la catégorie abélienne des représentations ainsi que ses invariants homologiques, tels la cohomologie du groupe ou la cohomologie de Tate.

Dans ce projet, il s'agit étudier les équivalences de Morita entre blocs d'algèbres de groupes finis, un sujet très classique dont les racines remontent déjà aux travaux de Brauer dès les années '30, et qui a engendré et motivé une grande partie de de la théorie des représentations et de l'algèbre homologique modernes. Un *bloc* est un facteur irréductible de l'algèbre du groupe, et deux blocs (entre deux groupes différents) sont *Morita équivalents* si leurs catégories de modules sont équivalentes. L'existence d'une telle équivalence permet de transférer de l'information partielle entre les caractères et les propriétés structurelles des deux groupes. Pour les mêmes raisons, on étudie aujourd'hui aussi l'existence d'équivalences entre les *catégories dérivées* de tels blocs, ce qui a donné lieu à des conjectures d'importance actuelle telle la célèbre *conjecture du groupe de défaut abélien de Broué* (1990).

Méthodes

Nous proposons l'application à ce genre de questions d'un nouveau paradigme, la théorie des 2-foncteurs de Mackey et des 2-motifs de Mackey (voir [Balmer et Dell'Ambrogio, « Mackey 2-functors and Mackey 2-motives », EMS Monographs in Mathematics, Zurich 2020]). C'est une théorie très récente mais qui a déjà fait ses preuves, notamment avec l'établissement d'analogues de la correspondance de Green (un résultat fondateur en théorie des représentations modulaires) dans les domaines de homotopie stable et la théorie des faisceaux ; voir [Balmer et Dell'Ambrogio, « Green equivalences in equivariant mathematics », Math. Ann., à paraître].

Brièvement, un *2-foncteur de Mackey* est un gadget algébrique qui encode la variance par rapport au groupe d'une théorie mathématique équivariante. Il consiste en une famille de catégories additives $M(G)$, une pour chaque groupe fini G, ainsi que de foncteurs de restriction et d'induction les reliant, satisfaisant des formules de conjugaison, d'adjonctions et de Mackey. Il s'agit d'une catégorification de la notion de (1-)foncteur de Mackey de Green et Dress utilisée depuis les années '60 par les topologues et les algébristes. Des exemples basiques de 2-foncteurs de Mackey ont pour $M(G)$ la catégorie des représentation de G ou sa catégorie dérivée. Mais les 2-foncteurs de Mackey prolifèrent aussi en topologie (tels la catégorie homotopique stable équivariante), en géométrie (les catégories abéliennes ou dérivées des faisceaux équivariants), et en géométrie non-commutative (la KK-théorie de Kasparov équivariante), pour mentionner juste quelques exemples fondamentaux.

Les *2-motifs de Mackey* sont une abstraction universelle de la notion de « bloc ». Ils s'organisent en une *2-catégorie additive*. De façon analogue aux motifs de Grothendieck en géométrie algébrique, tout 2-foncteur de Mackey se factorise de façon unique par la 2-catégorie des 2-motifs de Mackey. Il suit qu'une décomposition motivique d'un groupe G en une somme de 2-motifs donne lieu, pour tout 2-foncteur de Mackey M, à une décomposition de la catégorie $M(G)$. De façon similaire, tout équivalence entre deux 2-motifs donne lieu à une équivalence entre les facteurs (blocs) correspondants pour deux catégories $M(G_1)$ et $M(G_2)$. La définition des 2-motifs et la machinerie associée peuvent être adaptées à tout corps (ou anneau) de base, ou à une classe particulière de 2-foncteurs de Mackey qu'on souhaite étudier.

Étapes et articulation du projet

Concrètement, ce projet de thèse s'articule selon les points principaux suivants :

- Premièrement, on devrait consulter la vaste littérature existante pour récolter les cas concrets connus d'équivalences de Morita entre blocs d'algèbres de groupe modulaires. Ces équivalences sont typiquement données par tensorisation avec des bimodules de p-permutation, donc devraient admettre une reformulation dans la 2-catégorie des 2-motifs de Mackey (en une de ses variantes possibles). Cela offre une double possibilité d'applications :
- D'un côté, on aura des retombées en théorie des représentations : le monde abstrait et conceptuellement clair (propriété universelle, etc.) des 2-motifs, ainsi que l'interaction entre les différents modèles existants pour les 2-motifs, devraient nous suggérer une *systématique* des exemples. On pourra alors découvrir de nouveaux cas d'équivalences, jusqu'à maintenant passés inaperçus, ou sinon on pourra mieux définir les limitations de chaque classe d'exemples.
- De l'autre côté, on aura forcément des applications à d'autres domaines des mathématiques équivariantes. On cherchera, ou construira, des 2-foncteurs de Mackey M en topologie et géométrie, typiquement des modifications adéquates des exemples fondamentaux cités plus haut, qui satisfont les propriétés nécessaires pour qu'ils se factorisent par la 2-catégorie motivique associée à une certaine classe d'exemple d'équivalences (provenant de la théorie des représentation comme au premier point). Par la propriété universelle des 2-motifs, on aura alors automatiquement, pour chaque équivalence de cette classe, des équivalences correspondantes entre des blocs de deux catégories $M(G_1)$ et $M(G_2)$ pour chacun de ces 2-foncteurs de Mackey topologiques ou géométriques.
- De façon plus ambitieuse, on pourra essayer d'adapter les points précédents pour capturer et transférer à d'autre domaines des équivalences *dérivées* (plutôt que de Morita) entre blocs, comme celles qui surgissent typiquement dans la conjecture de Broué. Cela impliquerait l'utilisation de techniques plus raffinées d'infini-catégories et d'algèbre homotopique.

Ce projet de thèse s'inscrit dans les thématiques du projet ANR *ChroK* (ANR-16-CE40-0003) ainsi que du *Labex CEMPI* (ANR-11-LABX-0007-01) dans l'axe « Topologie et applications ».